Topologia
Lista 6 (ciągłość vs topologia podprzestrzeni)

Zad 1. Udowodnić, że superpozycja funkcji ciągłych jest funkcją ciagłą; ponadto, jeżeli (X, τ_X), (Y, τ_Y), (Z, τ_Z) są przestrzeniami topologicznymi, funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła w punkcie $x \in X$, a funkcja $g : Y \to Z$ jest ciągła w punkcie $f(x) \in Y$, to funkcja $f \circ g : X \to Z$ jest ciągła w punkcie x.

Zad 2. Niech (X, τ_X), (Y, τ_Y) będą przestrzeniami topologicznymi. Wykazać, że ciągłość odwzorowania $f : X \to Y$ jest równoważna każdemu z następujących warunków

a) $f^{-1}(U)$ jest zbiorem otwartym dla każdego $U \in \mathcal{B}$, gdzie $\mathcal{B}$ jest bazą topologii τ_Y,

b) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ dla każdego $A \subset X$,

c) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ dla każdego $B \subset Y$,

d) $f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) \subset \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ dla każdego $B \subset Y$.

Zad 3. Korzystając z topologicznej definicji ciagłości, sprawdzić ciagłość następujących funkcji na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$,[1] c) $f(x) = x^2$, d) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.[2]

Zad 4. Rozważmy podprzestrzeń A prostej euklidesowej $X = \mathbb{R}$.

a) Niech $A = [0, 1]$. Które ze zbiorów $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [0, \frac{1}{2})$, $A_3 = (\frac{1}{3}, 1]$, $A_4 = (0, 1)$ są domknięte, a które otwarte w A?

b) Niech $A = \mathbb{N}$. Wypisać topologię na A.

c) Niech $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Wyznaczyć wszystkie otwarto-domknięte zbiory jednoelementowe.

Zad 5. Rozważmy podprzestrzeń A przestrzeni topologicznej X. Pokazać, że

a) topologia podprzestrzeni τ_A jest najuboższą topologią na A taką, że tożsamościowe zanurzenie $i : A \to X$ (tzn. $i(x) = x$ dla każdego $x \in A$) jest ciągłe.

b) topologia podprzestrzeni τ_A jest najbogatszą topologią na A taką, że ciągłość odwzorowania $f : Y \to X$, gdzie $f(Y) \subset A$, pociąga ciągłość odwzorowania $f : Y \to A$.

c) topologia podprzestrzeni τ_A jest najuboższą topologią na A taką, że ciągłość odwzorowania $f : Y \to A$, pociąga ciągłość odwzorowania $f : Y \to X$.

d) topologia podprzestrzeni τ_A jest najuboższą topologią na A taką, że ciągłość odwzorowania $f : X \to Y$, pociąga ciągłość odwzorowania $f : A \to Y$.

Zad 6. Niech X i Y będa przestrzeniami topologicznymi oraz niech $\{G_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ będzie otwartym pokryciem przestrzeni X. Udowodnić, że jeżeli $f : X \to Y$ jest funkcją taką, że $f : G_t \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym dla każdego $t \in G_t$, to $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym.

Zad 7. Niech X i Y będa przestrzeniami topologicznymi oraz niech $\{F_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ będzie domkniętym pokryciem przestrzeni X. Udowodnić, że jeżeli $f : X \to Y$ jest funkcją taką, że $f : F_t \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym dla każdego $t \in F_t$, to $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym.

---

[1] $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ jest tak zwaną *częścią całkowitą* liczby x; inne nazwy: *cecha, entier, podłoga*
[2] $x - \lfloor x \rfloor$ jest *częścią ułamkową* (*mantysą*) liczby x